

Modelos de Reparo Imperfeito para Múltiplos Sistemas Reparáveis Aplicados para a Confiabilidade de Componentes Eletrônicas de Locomotivas

Natan H. Silva^a, Éder S. Brito^b, Francisco L. Neto^a e Vera L. D. Tomazella^c

^aInstituto de Ciências Matemáticas e Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil

^bPrograma Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística UFSCar-USP, São Carlos, SP, Brasil

^cDepartamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil

RESUMO

Neste trabalho, é apresentada uma aplicação dos modelos de reparo imperfeito para o estudo do tempo de vida e predição de confiabilidade de componentes eletrônicas presentes em uma empresa de logística ferroviária brasileira. Com base no histórico de falha de diferentes grupos de componentes eletrônicas, informações relevantes para a empresa podem ser extraídas, tais como o comportamento dos tempos de vida dos equipamentos e a probabilidade de falhas futuras das unidades. Uma breve revisão teórica dos modelos de reparo imperfeito é realizada, destacando-se os principais conceitos acerca das classes ARA e ARI. Para cada grupo de componentes, são estimados os parâmetros para cada modelo apresentado e um estudo de seleção de modelos e adequação de ajuste é realizado. Por fim, realiza-se a predição de confiabilidade para cada grupo de componentes. Os resultados obtidos atestam as vantagens dos modelos de reparo imperfeito para o ajuste e para a interpretação dos conjuntos de dados estudados.

PALAVRAS-CHAVE Análise de confiabilidade; máxima verossimilhança; modelos de reparo imperfeito; processo lei de potência; preditor de confiabilidade.

1. Introdução

Um dos maiores problemas enfrentados pela engenharia moderna é a ocorrência de falhas de equipamentos no setor de fábricas e indústrias. Essas falhas ocorrem naturalmente devido ao desgaste de peças ou componentes de máquinas, veículos de transporte e/ou outros equipamentos complexos e essenciais para o funcionamento básico dessas empresas. Essas provocam prejuízos não apenas pelo reparo das máquinas, mas também porque podem acarretar em atraso na produção de produtos e na provisão de serviços e até mesmo na perda de clientes.

Neste contexto, a tomada de ações no período mais curto possível após a ocorrência de uma falha é essencial para evitar danos adicionais às empresas. Portanto, o estudo dos processos de falha e o impacto que os reparos causam nesses equipamentos é essencial para a redução do custo e para a estruturação de políticas de otimização a serem implementadas.

Esse tipo de problema é bem estabelecido na área de confiabilidade estatística. Na literatura sobre confiabilidade, sistemas que podem retornar a condições de operação normalmente após uma falha são chamados de *sistemas reparáveis*. É natural pensar que os sistemas complexos utilizados em indústrias e empresas de engenharia são reparáveis, uma vez que não seria viável o descarte imediato dos equipamentos assim que uma falha fosse observada.

O escopo teórico utilizado pelos sistemas reparáveis é naturalmente relacionado à recorrência de eventos, já que falhas sucessivas podem ocorrer em um mesmo sistema (detalhes em [1]). Neste contexto, a modelagem estatística de eventos recorrentes em sistemas reparáveis pode ser feita através de processos de contagem [2]. Na literatura dos sistemas reparáveis, é muito comum a hipótese de que a ocorrência de falhas recorrentes segue um Processo de Poisson Não Homogêneo (PPNH) e, em particular, uma das mais relevantes formas paramétricas utilizadas é o Processo de Lei de Potência (PLP), proposto por [3].

Ademais, o efeito de um reparo realizado imediatamente após a observação de uma falha é uma característica crucial para os modelos de sistemas reparáveis e sua definição é relacionada ao processo de falhas do sistema. A suposição mais conhecida e discutida na literatura argumenta que após a realização de um reparo, o sistema retorna à mesma condição em que estava anteriormente à falha, em uma situação conhecida como “*as bad as old*” (ABAO), ou seja, tão ruim quanto velho. Esse tipo de reparo é denominado de *reparo mínimo* (RM), sendo apresentado com mais detalhes em [4] e [5]. Em contrapartida, também existe a suposição de que um sistema reparável pode passar por um processo de renovação, de modo que após o reparo, o sistema assumira uma condição “*as good as new*” (AGAN), ou seja, tão bom quanto novo. Este tipo de reparo é conhecido como *reparo perfeito* (RP), sendo mais detalhado em [6] e [7].

Entretanto, essas duas hipóteses quanto à natureza do reparo não são suficientes para situações reais da indústria e da engenharia. É esperado que existam inúmeras situações nas quais o reparo levará o sistema a um estado intermediário entre o reparo mínimo e o reparo perfeito. Esse tipo de reparo é denominado *reparo imperfeito* (RI) e não retorna o sistema às condições iniciais como o RP, mas também deixa o sistema em uma condição melhor que o RM. Essa flexibilidade faz com que a aplicação em situações reais desse tipo de modelo sejam possíveis, sendo uma boa suposição para a modelagem dos tempos de falha de sistemas reparáveis.

A motivação deste trabalho é dada por uma situação real envolvendo problemas de falhas de componentes eletrônicas de locomotivas em uma empresa de logística ferroviária brasileira. Após a falha, as componentes são enviadas para o laboratório de manutenção, onde são restauradas e colocadas de volta em operação. Desta forma, o objetivo do estudo é utilizar os tempos de falha destes equipamentos para o melhor entendimento do comportamento dos seus tempos de vida e da eficiência dos reparos realizados. Neste sentido, a hipótese de que os reparos sejam da categoria RI é plausível, uma vez que os equipamentos não são substituídos e os reparos podem melhorar o estado das componentes de alguma forma. Além do mais, como será discutido posteriormente, os modelos que envolvem a suposição RI são mais gerais que os demais, permitindo a quantificação da eficiência dos reparos realizados.

Portanto, neste trabalho, é feita uma revisão da literatura sobre modelos de reparo imperfeito, seguida da aplicação destes para a modelagem de dados reais envolvendo os tempos de falha de um conjunto de componentes eletrônicas de locomotivas. Métodos frequentistas serão utilizados para a estimação dos parâmetros dos modelos apresentados. Por fim, preditores de confiabilidade serão utilizados para a estimar o comportamento futuro dos sistemas sob estudo, um resultado de extrema importância para a

organização estratégica da manutenção da indústria.

O artigo se organiza da seguinte forma. Na Seção 2 é apresentada a teoria conhecida na literatura sobre RI; Na Seção 2.1 são apresentadas ideias básicas sobre os processos de contagem que sustentam a teoria da modelagem de sistemas reparáveis; A Seção 2.2 detalha os modelos de RI baseados na ideia de uma idade virtual, proposta por [8]; Na Seção 2.3 são apresentadas as classes de modelos de RI, ARA e ARI, propostos por [9]; Na Seção 2.4, apresentamos a modelagem proposta por [10] para múltiplos sistemas reparáveis sob a condição de RI, assim como a definição de preditores de confiabilidade que levam em conta o tipo do reparo. Na Seção 3, aplicamos os modelos apresentados para o ajuste de cinco conjuntos de dados, que dizem respeito aos tempos de falha de cinco tipos de componentes de locomotiva diferentes. Finalmente, na Seção 4, são enfatizados os principais resultados teóricos apresentados neste trabalho e sua relevância para a aplicação de situações reais, trazendo indícios para os caminhos tomados em pesquisas futuras.

2. Modelos de Reparo Imperfeito

Nesta seção é apresentada uma revisão de literatura acerca da teoria de modelos de reparo imperfeito. A ideia é apresentar a teoria básica utilizada por sistemas de modelagem sob este tipo de reparo de modo a serem aplicadas no estudo do problema central proposto neste trabalho, na Seção 3.

Primeiramente, destacamos as principais ideias de processos de contagem para a modelagem de tempos de vida, enfatizando os PPNH. Então, são apresentadas as ideias iniciais de reparo imperfeito e idade virtual definidas por Kijima [8] e a definição das classes de reparo imperfeito ARA e ARI. Finalmente, é feita uma revisão das contribuições do trabalho de Toledo [10], que apresenta uma modelagem dos tempos de falha de múltiplos sistemas reparáveis sob a suposição de reparo imperfeito, propõe um teste gráfico de verificação de qualidade de ajuste e funções de predição de confiabilidade a partir do último tempo de falha observado.

2.1. Suposições Básicas

Seja $N(t)$ o número de falhas observadas em um único sistema reparável no intervalo de tempo $(0, t]$ e $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias que representam os tempos de falha de um sistema e assuma que as ações de reparo possuem duração negligenciável. Então, o processo de falhas do sistema pode igualmente ser caracterizado pelos dois processos $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{T_{N(t)}\}_{t \geq 0}$, além de ser completamente determinado pela *função de intensidade de falha*, dada por

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[N(t, t + \Delta t) \geq 1 \mid \mathcal{H}_t]}{\Delta t}, \quad t \geq 0,$$

onde \mathcal{H}_t é a filtragem mínima definida pelo histórico de processos no tempo t e $N(t, t + \Delta t) = N(t + \Delta t) - N(t)$.

Se o processo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos independentes, $N(0) = 0$ e a função de intensidade $\lambda(t)$ é não constante, então o processo de falha é classificado como um PPNH. Neste caso, a *função média acumulada* (no inglês, *mean cumulative function - MCF*) pode ser chamada equivalentemente de *função de intensidade de falha acumulada*, definida por $\Lambda(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \int_0^t \lambda(u) du$.

Além disso, a função de intensidade $\lambda(t)$ pode ou não assumir uma forma paramétrica. Uma das mais conhecidas e utilizadas formas paramétricas para esse tipo de processo na literatura de confiabilidade é o PLP, no qual a função de intensidade de falha e a intensidade acumulada são definidas, respectivamente, como

$$\lambda(t | \beta, \eta) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \quad \text{e} \quad \Lambda(t | \beta, \eta) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta, \quad (1)$$

com $t \geq 0$, sendo os parâmetros $\beta > 0$ e $\eta > 0$ de forma e escala, respectivamente. Essa parametrização proposta por [3] é defendida pelos autores da área [11] por ser flexível, tem uma implementação computacional simplificada e possui uma interpretação física na seguinte questão: o parâmetro β indica se um sistema está melhorando ($\beta < 1$) ou deteriorando ($\beta > 1$) ao longo do tempo, enquanto o parâmetro η indica o tempo esperado, considerando que apenas uma falha seja observada no sistema (no caso, $\mathbb{E}[N(\eta)] = \Lambda(\eta) = 1$).

No contexto dos reparos mínimos, nos quais o reparo realizado após a falha não impacta a função de intensidade do sistema, se assumirmos um PLP, o processo de falha é diretamente caracterizado pela expressão $\lambda(t)$ na equação 1. Assim, no contexto dos reparos imperfeitos, essa função sofrerá uma diminuição após cada falha seguida de um reparo. Entretanto, até que ocorra a primeira falha/reparo do sistema, a função de intensidade permanece a mesma, com o mesmo comportamento para qualquer tipo de reparo e, por essa razão, é normalmente denominada *função de intensidade de falha inicial*, ou simplesmente, *função de intensidade inicial*.

2.2. Modelos de Idade Virtual

O trabalho de Kijima *et al.* [8] foi um dos pioneiros na discussão dos modelos da classe RI. A ideia proposta pelos autores se dava em uma política de manutenção capaz de balancear os tempos prolongados de deterioração de sistemas e o alto custo de reparos perfeitos, associados ou não à substituição desses sistemas. Consequentemente, o modelo proposto introduziu o conceito de *idade virtual*.

A ideia principal é que, após cada reparo, o sistema irá assumir uma nova idade não real, mas que descreve a sua condição atual quando comparado com o cenário de um sistema novo. A idade virtual é uma função positiva da idade real e do histórico de falhas passadas. Ou seja, $V_t = V(t | N(t); T_1, \dots, T_{N(t)})$, onde V_t representa a idade virtual no tempo t .

De maneira mais formal, seja t um tempo de falha de um sistema, $V_{N(t)}$ sua idade virtual e $N(t)$ o número de falhas/reparos observados no tempo. Se $V_{N(t)} = v$, o tempo $X_{N(t)+1}$ entre a $N(t)$ -ésima e a $(N(t) + 1)$ -ésima falha do sistema satisfaz

$$\mathbb{P}[X_{N(t)+1} = x | V_{N(t)} = v] = \frac{F(x + v) - F(v)}{1 - F(v)},$$

onde $F(x)$ representa a distribuição do tempo de vida de um sistema novo.

Neste sentido, X_n trata-se de uma idade adicional após a $(n - 1)$ -ésima falha. Entretanto, a ideia proposta pelo modelo é de que existe uma eficiência nos reparos realizados, a qual irá reduzir a idade adicional X_n . Ou seja, uma medida $a_n \in (0, 1)$ que representa a eficiência do conserto por ser multiplicativamente incluída no modelo de modo a reduzir X_n e definir uma idade virtual ao sistema.

No trabalho [12], Kijima *et al.* definiram dois modelos RI, dependendo em como os reparos afetam a idade virtual do sistema. No primeiro modelo, o n -ésimo conserto afeta apenas o n -ésimo incremento na idade X_n , e, neste caso, o efeito de reparo a_n reduz o incremento X_n para $a_n X_n$, resultando que a idade virtual após a n -ésima falha seja definida por $V_n = V_{n-1} + a_n X_n$. No entanto, no segundo modelo o n -ésimo reparo afeta a idade virtual atual do sistema, mas o efeito a_n reduz a idade virtual V_n , definida como $V_n = a_n(V_{n-1} + X_n)$. Veja que em ambos os modelos, se $a_n = 1$ para todo $n \geq 1$, o caso particular do RM é obtido, uma vez que $V_n = \sum_{n \geq 1} X_n$, para todo n , enquanto que se $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$, o caso particular do RP é obtido, já que $V_n = 0$, para todo n .

2.3. As Classes ARA e ARI de Modelos RI

Doyen e Gaudoin propuseram em seu trabalho [9] duas novas classes de modelos RI baseadas em como o efeito do reparo pode reduzir a função de intensidade inicial do modelo. O primeiro, a classe ARA (no inglês, *Arithmetic Reduction of Age*) é baseado na redução da idade virtual do sistema, enquanto o segundo, a classe ARI (no inglês, *Arithmetic Reduction of Intensity*) se baseia na redução proporcional da função de intensidade do sistema. Os autores usaram a ideia de idade virtual e efeito de reparo de Kijima *et. al.*, propondo generalizações dos modelos apresentados acima. Ambas as classes propostas por Doyen e Gaudoin são definidas por uma memória m que indica que cada ação de reparo reduz o desgaste ocorrido no sistema após as últimas m falhas. A memória m pode ser interpretada como o número máximo de falhas que impactam o efeito do reparo atual. Perceba que a função de intensidade do sistema deve ser recalculada após cada falha, considerando as m falhas mais recentes.

Em relação ao efeito do reparo, nestes modelos os autores consideram que é constante para todos os reparos realizados. Esse efeito é medido por um parâmetro θ , tal que $0 \leq \theta \leq 1$ assim como no modelo de Kijima *et. al.*

2.3.1. A classe de modelos ARA_m

O princípio da classe ARA_m , segundo [9] é a consideração de que o reparo rejuvenesce o sistema de tal forma que sua função de intensidade no tempo t é igual à intensidade inicial no tempo V_t , onde $V_t < t$. A intensidade de falha de um modelo ARA pode ser escrita como uma função da sua idade virtual, ou seja, $\lambda_{ARA_m}(t) = \lambda(V_t)$, onde $\lambda(t)$ é a função de intensidade inicial.

Considerando o parâmetro de efeito dos reparos, θ , e uma memória m , a função de intensidade de falha para a classe de modelos ARA_m é definida como

$$\lambda_{ARA_m}(t) = \lambda \left(t - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, N(t)-1)} \theta^p T_{N(t)-p} \right). \quad (2)$$

Um interessante caso particular de modelo da classe ARA_m é o caso onde $m = 1$. Esse caso particular ARA_1 corresponde ao segundo modelo de idade virtual proposto por Kijima *et. al.* no trabalho [8]. Sua função de intensidade de falha é simplesmente dada por

$$\lambda_{ARA_1}(t) = \lambda(t - (1 - \theta)T_{N(t)}),$$

e, neste caso, é facilmente observado que os modelos RM e RP são casos particulares quando $\theta = 1$ ou $\theta = 0$, respectivamente.

Na classe de modelos ARA, entre duas falhas consecutivas, a intensidade de falhas é horizontalmente paralela à sua intensidade inicial. Isso pode ser percebido pelo gráfico da Figura 1 abaixo, onde a linha tracejada é o gráfico da função de intensidade inicial (correspondente à função de intensidade do modelo de reparo mínimo), enquanto as demais curvas são os gráficos da função de intensidade para cada intervalo entre duas falhas consecutivas. É fácil notar que esses gráficos são deslocamentos horizontais (e proporcionais ao tamanho do intervalo entre as falhas consecutivas) do gráfico da função de intensidade inicial.

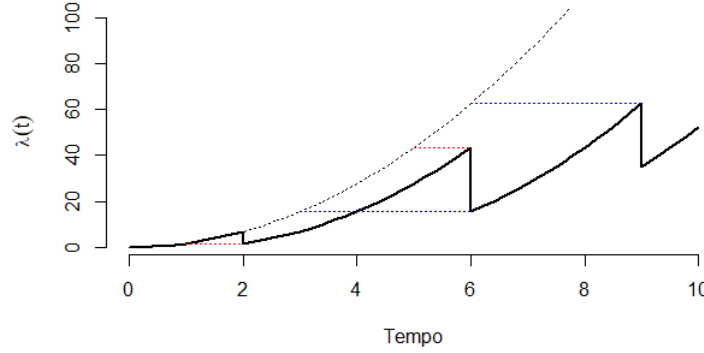


Figure 1. Gráfico da intensidade de falha de modelo da classe ARA comparado à intensidade de falha do modelo de reparo mínimo (linha pontilhada).

2.3.2. A classe de modelos ARI_m

A ideia básica da classe de modelos ARI_m é a consideração de que cada reparo reduz a intensidade de falha, dependendo do histórico de problemas do processo. Assim, a função de intensidade de falha do modelo ARI_m , dados o parâmetro de efeito do reparo e o histórico das últimas m falhas observadas no sistema, é definido como

$$\lambda_{ARI_m}(t) = \lambda(t) - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, N(t)-1)} \theta^p \lambda(T_{N(t)-p}), \quad (3)$$

onde $\lambda(t)$ é a função de intensidade de falha inicial do processo.

Na classe de modelos ARI, entre duas falhas consecutivas, a intensidade de falha é verticalmente paralela à sua intensidade inicial. Esse comportamento pode ser observado no gráfico da Figura 2, onde a linha tracejada é o gráfico da função de intensidade inicial (correspondente à função de intensidade do modelo de reparo mínimo) e as demais curvas são gráficos da função de intensidade entre duas falhas consecutivas. Observa-se que esses trechos do gráfico são deslocamentos verticais em relação à função de intensidade inicial (tracejada).

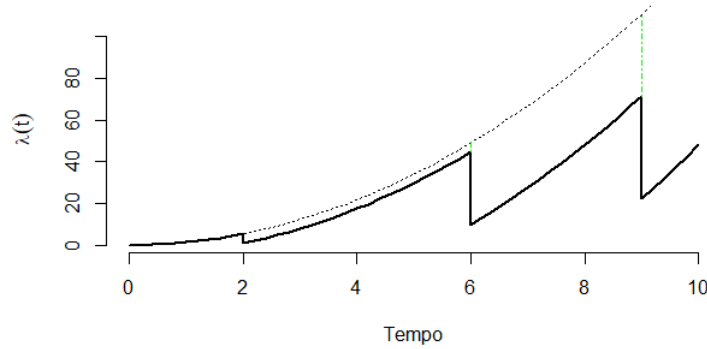


Figure 2. Gráfico da intensidade de falha de modelo da classe ARI comparado à intensidade de falha do modelo de reparo mínimo (linha pontilhada).

2.4. Estimação para Múltiplos Sistemas Reparáveis

Em Toledo *et. al* [10] foram utilizados os modelos definidos por Doyen e Gaudoin, sendo propostos métodos inferenciais para a estimação de parâmetros considerando ambas as classes ARA e ARI a partir dos históricos de falha de múltiplos sistemas reparáveis. Ademais, no seu trabalho, os autores também propuseram uma metodologia de análise gráfica da qualidade do ajuste, além de um estimador da predição da confiabilidade. Abaixo são apresentadas as principais ideias deste trabalho.

2.4.1. Estimação dos Parâmetros

Considere k sistemas reparáveis independentes sob observação durante um tempo predefinido t_k^* , com $k = 1, 2, \dots$. Seja $0 < t_{i,1} < t_{i,2} < \dots < t_{i,n_i}$ os tempos de falha observados para o i -ésimo sistema, onde $t_{i,j} \leq t_i^*$ representa o tempo da j -ésima falha no i -ésimo sistema, com $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n_i$. Neste caso, n_i indica o número de falhas observadas para o sistema i e $N = \sum_{i=1}^k n_i$ é o número total de falhas observadas em todos os k sistemas.

Considerando que a função de intensidade inicial $\lambda(t)$ é descrita por um modelo paramétrico e que os k sistemas estão sujeitos ao reparo imperfeito com efeito $\theta \in [0, 1]$ após cada falha, denotaremos por $\boldsymbol{\mu}$ o vetor de parâmetros do modelo, que incluem os parâmetros da função de intensidade inicial e o parâmetro de eficiência de reparo θ .

Segundo [10], as funções de verossimilhança do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ nos modelos ARA_m e ARI_m são dadas, respectivamente, por

$$L_{ARA_m}(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} \left[\lambda_0(t_{i,j} - (1-\theta)s(t_{i,j-1})) \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-\Lambda_0(t_{i,j} - (1-\theta)s(t_{i,j-1})) + \Lambda_0(t_{i,j-1} - (1-\theta)s(t_{i,j-1}))} \right] \right. \\ \left. \times e^{-\Lambda_0(t_i^* - (1-\theta)s(t_{i,n_i})) + \Lambda_0(t_{i,n_i} - (1-\theta)s(t_{i,n_i}))} \right\} \quad (4)$$

e

$$L_{\text{ARI}_m}(\boldsymbol{\mu} \mid \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} \left[(\lambda_0(t_{i,j}) + (1-\theta)\underline{s}(t_{i,j-1})) \right. \right. \\ \times e^{-\Lambda_0(t_{i,j}) + \Lambda_0(t_{i,j-1}) + (t_{i,j} - t_{i,j-1})(1-\theta)\underline{s}(t_{i,j-1})} \left. \left. \right] \right. \\ \left. \times e^{-\Lambda_0(t_i^*) + \Lambda_0(t_{i,n_i}) + (t_i^* - t_{i,n_i})(1-\theta)\underline{s}(t_{i,n_i})} \right\}, \quad (5)$$

onde $\mathbf{t} = (t_{1,1}, \dots, t_{k,n_k})$ denota o vetor de todos os tempos de falha observados e

$$s(t_{i,l}) = \sum_{p=0}^{\min(m-1, l-1)} \theta^p t_{i, l-p} \quad \text{e} \quad \underline{s}(t_{i,l}) = \sum_{p=0}^{\min(m-1, l-1)} \theta^p \lambda_0(t_{i, l-p}).$$

Supondo que o processo de falhas inicial do sistema segue um PLP, as funções de intensidade e intensidade acumulada dadas em (1) podem ser substituídas nas equações (4) e (5), obtendo uma função de verossimilhança paramétrica para os modelos ARA_m e ARI_m , respectivamente. Além disso, as funções log-verossimilhança para as classes ARA e ARI também podem ser calculadas e são dadas, respectivamente, por

$$l_{\text{ARA}_m}(\mu \mid t_{i,j}) = N(\log(\beta) - \beta \log(\eta)) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \log(t_{i,j} - (1-\theta)s(t_{i,j-1})) \\ - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left[(t_{i,j} - (1-\theta)s(t_{i,j-1}))^\beta - (t_{i,j-1} - (1-\theta)s(t_{i,j-1}))^\beta \right] \\ - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^k \left[(t_i^* - (1-\theta)s(t_{i,n_i}))^\beta - (t_{i,n_i} - (1-\theta)s(t_{i,n_i}))^\beta \right] \quad (6)$$

e

$$l_{\text{ARI}_m}(\mu \mid t_{i,j}) = N(\log(\beta) - \beta \log(\eta)) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \log \left(t_{i,j}^{\beta-1} - (1-\theta)\underline{s}(t_{i,j-1}) \right) \\ - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left[t_{i,j}^\beta - t_{i,j-1}^\beta - \beta(t_{i,j} - t_{i,j-1})(1-\theta)\underline{s}(t_{i,j-1}) \right] \\ - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^k \left[t_i^{*\beta} - t_{i,n_i}^\beta - \beta(t_i^* - t_{i,n_i})(1-\theta)\underline{s}(t_{i,n_i}) \right], \quad (7)$$

onde $\underline{s}(t_{i,l}) = \sum_{p=0}^{\min(m-1, l-1)} \theta^p t_{i, l-p}^{\beta-1}$.

Dada a complexidade das funções log-verossimilhança (6) e (7), os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ dos parâmetros β , η e θ devem ser obtidos a partir da maximização dessas funções através de métodos numéricos, como apontado por [10]. Além disso, as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança baseadas na distribuição Normal são utilizadas para a construção de intervalos de confiança para os parâmetros.

2.4.2. Preditor da Confiabilidade

Com as estimativas dos parâmetros dos modelos de RI, é possível estimarmos uma predição de confiabilidade do sistema a partir do último tempo de falha observado $T - n = t_n$ e observar o comportamento esperado do tempo de vida deste sistema. Nosso interesse é estimar o tempo $t = T_{n+1} - t_n$ até a próxima falha, considerando o histórico \mathcal{H}_{t_n} até a última falha observada t_n . A função de predição de confiabilidade no tempo t é dada por

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathbb{P}[T_{n+1} - t_n > t \mid \mathcal{H}_{t_n}] = \mathbb{P}[N(t_n + t) - N(t_n) = 0 \mid \mathcal{H}_{t_n}] \\ &= \exp \left\{ - \int_{t_n}^{t_n+t} \lambda(u) du \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

onde $\lambda(t)$ é a função de intensidade do modelo e $t_n \leq u \leq t_n + t < T_{n+1}$.

Para a classe ARA_m , substituindo a função de intensidade $\lambda(t)$ na equação (8) pela função de intensidade λ_{ARA_m} dada em (2), obtemos o preditor

$$\begin{aligned} R_{ARA_m}(t) &= \exp \left\{ - \int_{t_n}^{t_n+t} \lambda_{ARA_m}(u) du \right\} \\ &= \exp \left\{ - \frac{1}{\eta^\beta} \left[(t_n + t - (1 - \theta)s(t_n))^\beta + (t_n - (1 - \theta)s(t_n))^\beta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Da mesma forma, para a classe ARI_m introduzimos a função de intensidade λ_{ARI_m} dada em (3) na equação (8), obtendo o preditor

$$\begin{aligned} R_{ARI_m}(t) &= \exp \left\{ - \int_{t_n}^{t_n+t} \lambda_{ARI_m}(u) du \right\} \\ &= \exp \left\{ - \frac{1}{\eta^\beta} \left[(t_n + t)^\beta - (t_n)^\beta - t(1 - \theta)\beta \underline{s}(t_n) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Além disso, a partir da predição da função de confiabilidade obtemos o *tempo médio até a falha* (no inglês, *mean time to failure* - MTTF) no tempo $T_n = t_n$, ou seja, o tempo esperado até a ocorrência da próxima falha após o tempo t_n de um dado sistema. O MTTF no tempo t_n será descrito como

$$\text{MTTF}_{t_n} = \mathbb{E}[T_{n+1} - t_n \mid \mathcal{H}_{t_n}] = \int_0^\infty R(t) dt, \quad (11)$$

onde $R(t)$ é dado por (9) e (10) para as classes de modelos IR ARA_m e ARI_m .

3. Aplicações em dados reais

O conjunto de dados utilizado foi obtido a partir de uma empresa logística brasileira de malhas ferroviárias, que conta com um sistema composto por diferentes tipos de equipamento. Cada unidade registrada no *software* da empresa tem um histórico de reparos, unido às descrições técnicas dos problemas e as considerações dos técnicos durante o conserto.

Assim, é de interesse deste estudo a verificação da qualidade dos reparos realizados com base no histórico de falhas de modo a auxiliar os técnicos da empresa no processo

de tomada de diversas decisões, como por exemplo, avaliar, a partir do comportamento futuro predito pelo preditor de confiabilidade, se um equipamento deve ser descartado ou se é viável repará-lo novamente. O conjunto de dados contém cinco classes de diferentes tipos de peça. Para cada grupo foi atribuído um modelo para o estudo dos seus tempos de vida.

A Figura 3 mostra a distribuição do número de falhas observado para cada grupo de equipamento. É evidente que o número médio de falhas por unidade do conjunto de dados tende a ser relativamente baixo para todos os grupos, contando com frequências de no máximo 9 falhas.

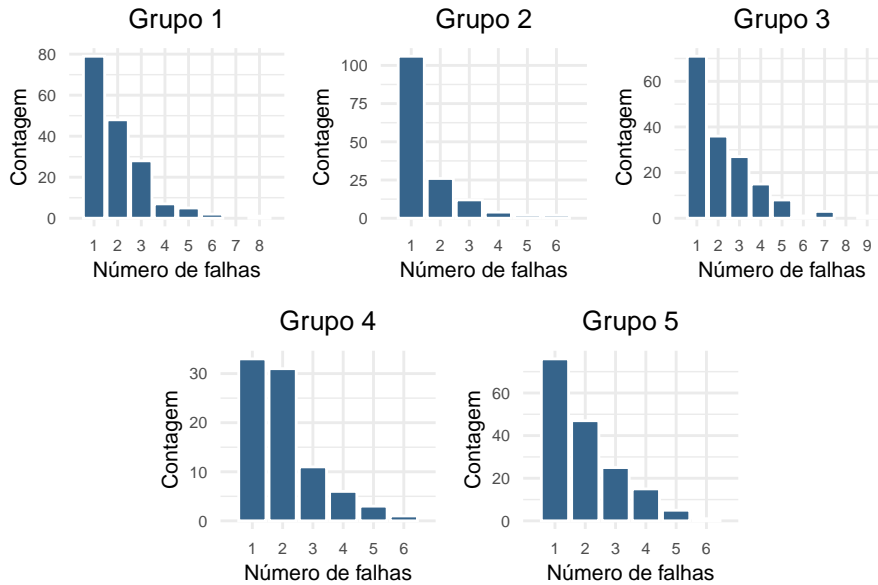


Figure 3. Distribuição do tamanho do histórico das peças no conjunto de dados segundo os cinco grupos.

Cada unidade do conjunto de dados contribui para a função de verossimilhança de duas formas: uma apresentando diretamente tempos observados de falha e reparo e outra baseada no fato de que na data de coleta do conjunto de dados essas peças ainda estavam em operação. Assim, para o ajuste do modelo deve ser considerado que os tempos de vida são truncados no tempo t^* , que representa o tempo de vida do equipamento ainda em operação quando os dados foram obtidos.

Para cada grupo foram aplicadas três abordagens distintas de modelagem, baseadas no tipo de reparo considerado. Um desses modelos é o modelo de reparo mínimo (RM), considerando que o conserto de cada peça não reduz, de fato, a função de intensidade da peça, mantendo o risco no mesmo estado imediatamente antes da falha. Os outros dois modelos aplicados correspondem às classes RI ARA_m e ARI_m , para as quais foram testados todos os valores possíveis de m para todos os grupos de peças.

Primeiramente, para a escolha do melhor valor de memória a ser utilizado nos modelos ARA_m e ARI_m o critério escolhido foi a seleção daquele modelo que apresentou o maior valor para a função log-verossimilhança. Os resultados para todos os grupos e ambas as classes são exibidos na Figura 4. Neste caso, para quase todos os grupos e modelos, seleciona-se o valor $m = 1$ tanto para o modelo ARA quanto para o ARI. Este resultado é particularmente interessante e pode ser justificado pela grande frequência de componentes do conjunto de dados que possuem apenas uma falha observada durante o período do estudo, como mostrado pela Figura 3. Para os grupos

1, 2, 4 e 5 fica claramente observada a diminuição da qualidade do ajuste com o aumento da memória m . Por outro lado, existe um aumento do máximo da função log-verossimilhança para o grupo 3, que é justamente o grupo com o maior número de falhas observados para um único sistema. Ademais, a estabilidade esperada do máximo da função log-verossimilhança quando m aumenta [13] de fato foi observado para todos os cinco grupos.

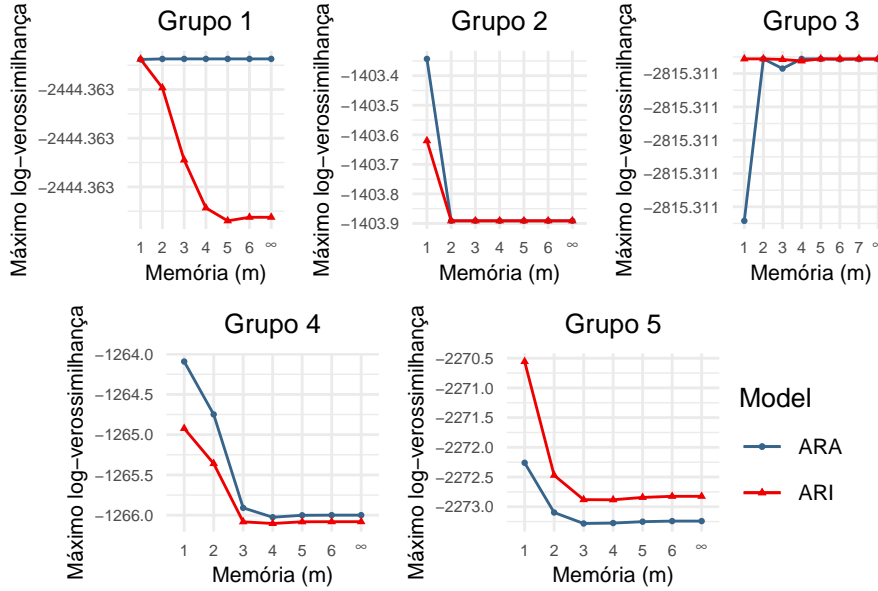


Figure 4. Estimadores de máxima verossimilhança para os cinco grupos.

Após a escolha dos melhores ajustes para os modelos ARA e ARI, esses modelos foram comparados ao caso particular do modelo de reparo mínimo, RM. Os critérios AIC (no inglês, *Akaike Information Criterion*) e BIC (no inglês, *Bayesian Information Criterion*) foram utilizados para a decisão de quais modelos resultaram em um melhor ajuste para o conjunto de dados. Os resultados da estimação para os três modelos em cada grupo de equipamento é apresentado na Tabela 1. Em adição, o melhor modelo segundo esses critérios é marcado com *, na Tabela.

Table 1. Resultados da estimação dos parâmetros para cada um dos cinco grupos.

Grupo	Modelo	$\hat{\beta}$ (95% $IC_{\hat{\beta}}$)	$\hat{\eta}$ (95% $IC_{\hat{\eta}}$)	$\hat{\theta}$ (95% $IC_{\hat{\theta}}$)	AIC	BIC
1	ARA_1	2.30 (2.04, 2.55)	3758.06 (3493.70, 4022.42)	1 (0.80, 1)	4894.73	4906.96
	ARI_1	2.30 (2.03, 2.56)	3758.06 (3500.49, 4015.64)	1 (0.74, 1)	4894.73	4906.96
	RM^*	2.30 (2.05, 2.54)	3758.06 (3522.37, 3993.76)	—	4892.73	4900.88
2	ARA_1	2.76 (2.37, 3.15)	3465.04 (3228.40, 3701.68)	0.89 (0.70, 1)	2812.69	2823.59
	ARI_1	2.72 (2.35, 3.10)	3482.34 (3241.23, 3723.45)	0.86 (0.52, 1)	2813.24	2824.14
	RM^*	2.68 (2.32, 3.04)	3523.11 (3300.64, 3745.59)	—	2811.78	2819.05
3	ARA_1	2.08 (1.84, 2.32)	2947.46 (2721.86, 3173.06)	1 (0.75, 1)	5636.62	5649.21
	ARI_1	2.08 (1.86, 2.30)	2947.49 (2718.83, 3176.15)	1 (0.74, 1)	5636.62	5649.21
	RM^*	2.08 (1.87, 2.29)	2947.49 (2752.48, 3142.50)	—	5634.62	5643.02
4	ARA_1^*	2.46 (2.05, 2.88)	2444.53 (2222.00, 2667.06)	0.57 (0.41, 0.74)	2534.18	2544.48
	ARI_1	2.33 (1.99, 2.68)	2460.06 (2219.19, 2700.92)	0.48 (0.24, 0.72)	2535.85	2546.15
	RM	2.09 (1.76, 2.42)	2681.28 (2431.47, 2931.09)	—	2543.79	2550.66
5	ARA_1	1.61 (1.41, 1.80)	1657.66 (1493.87, 1821.45)	0.64 (0.33, 0.95)	4550.52	4562.66
	ARI_1^*	1.61 (1.43, 1.78)	1598.60 (1427.61, 1769.59)	0.69 (0.48, 0.89)	4547.11	4559.25
	RM	1.53 (1.36, 1.70)	1728.60 (1567.17, 1890.03)	—	4551.49	4559.59

Os resultados apresentados na Tabela 1 permitem a tirada de algumas conclusões sobre os tempos de vida das componentes e os seus respectivos reparos. Inicialmente, veja que a estimativa $\hat{\beta}$ é maior que 1 em todos os grupos, indicando que os sistemas estão se degradando ao longo do tempo. Como enunciado na Seção 2.1, a estimativa $\hat{\eta}$ indica o tempo esperado para que ocorra exatamente uma falha no sistema; assim se considerarmos, por exemplo, uma componente do grupo 1, é esperado que uma falha ocorra em, aproximadamente 3758 dias.

Os critérios AIC e BIC indicam que os grupos 1, 2 e 3 são melhor ajustados pelo modelo RM, sugerindo que cada reparo não resulta em uma diminuição da função de risco instantâneo. Nos grupos 4 e 5, em contrapartida, o parâmetro de efeito do reparo θ sugere uma diminuição estatisticamente significativa, porém não completa, da função de intensidade quando realizado o reparo, uma vez que os intervalos de confiança 95% não indicam uma aproximação dos modelos RM ou RP.

Para os testes de aptidão nos cinco grupos estudados foi utilizada a metodologia gráfica proposta em [10], usando os valores empíricos da função MCF obtidos a partir dos dados, em comparação com uma média da estimação obtida pelos modelos paramétricos. Como apontado por [7], a estimação não paramétrica da função MCF é feita com base no procedimento de Nelson-Aalen, e o gráfico da qualidade do ajuste indica que, quanto melhor o ajuste do modelo, mais próxima a curva estimada pelo modelo estará da curva MCF empírica. Como mostrado na Figura 5 foi observado, no geral, um bom ajuste dos modelos para todos os grupos estudados.

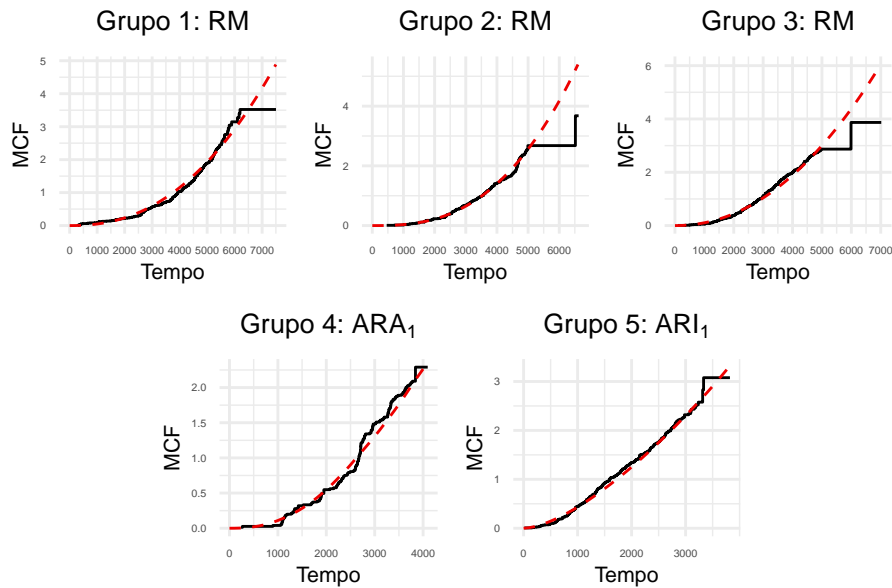


Figure 5. Valores empíricos da função MCF para cada grupo em conjunto com a sua respectiva estimação paramétrica (linha pontilhada).

Baseando-se nos parâmetros ajustados, cada unidade individual pode ser descrita pelos modelos selecionados. A Figura 6 mostra as funções de confiabilidade previstas para as unidades de cada grupo que apresentaram o maior número de falhas. Tomando a unidade observada no grupo 1, por exemplo, podemos ver que a sua confiabilidade 7500 dias após a sua fabricação é próxima de zero, considerando todo o seu histórico de falhas, de modo que, a partir de sua última falha, espera-se que a peça irá funcionar por, em média, 949,71 dias antes de apresentar problemas novamente.

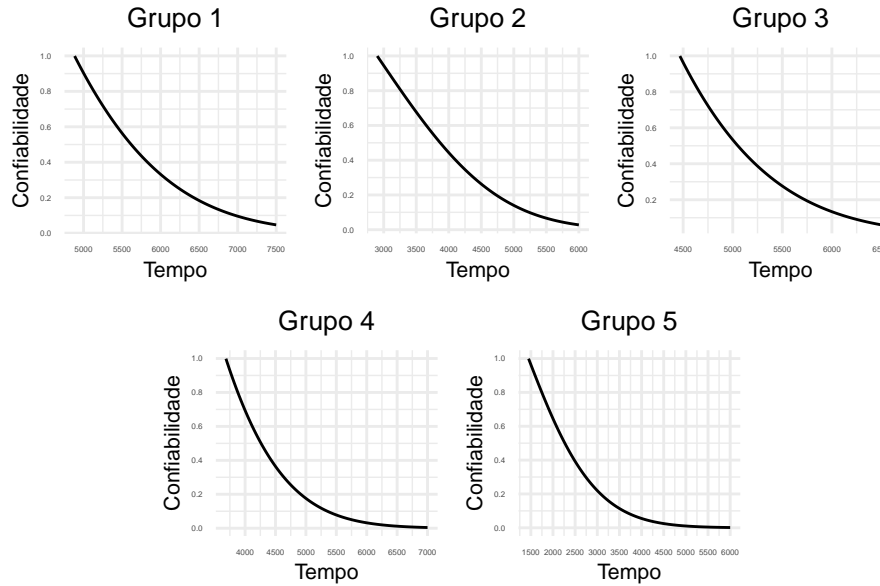


Figure 6. Função de confiabilidade predita para as unidades com o maior número de falhas observadas em cada grupo.

Finalmente, usando a equação (11), o tempo médio estimado a partir do último reparo de cada uma dessas unidades foi calculado, sendo exibidos na Tabela 2.

Table 2. Tempos médios estimados até a próxima falha das componentes com o maior número de falhas observadas em cada grupo, em dias.

Unidade	1	2	3	4	5
Média	949,71	1138,28	774,14	821,57	1053,92

4. Conclusões

Neste trabalho foram apresentados os principais conceitos na área de análise de confiabilidade de múltiplos sistemas reparáveis sujeitos a reparos imperfeitos após cada falha. Uma revisão de literatura acerca de modelos RI foi feita, seguida da apresentação de métodos de estimação dos seus respectivos parâmetros, assim com a predição da confiabilidade futura.

Um novo e interessante conjunto de dados foi apresentado e analisado no contexto das duas classes de modelos ARA e ARI da família de modelos RI. Alguns grupos dos dados obtiveram resultados não comumente observados em aplicações na literatura, nos quais o aumento da memória m dos modelos leva a uma diminuição na qualidade do ajuste. Como mencionado anteriormente, a possível causa deste efeito se dá pelo fato de que existem muitas unidades com uma única falha observada, favorecendo a ideia de se usar um valor de memória inferior para ambas as classes ARA_m e ARI_m .

Dos cinco grupos de tempos de falha observados, todos podem ser descritos pelos modelos paramétricos de forma satisfatória, como sugerem os gráficos de comparação com as curvas empíricas do MCF. Como consequência desse resultado, foi possível a realização de predições dos tempos de falha de cada unidade usando diretamente os modelos paramétricos que melhor se ajustaram em cada caso.

Os resultados deste trabalho, portanto, atestam a aplicabilidade dos modelos RI para o conjunto de dados apresentado, uma vez que o objetivo de modelar e prever o comportamento das componentes observadas foi alcançado. Baseando-se nesses resultados, os modelos podem contribuir para uma investigação mais complexa do conjunto de dados, possibilitando, por exemplo, o estudo de minimização do custo de manutenção quando uma falha ocorre ou a automatização do processo de tomada de decisões quanto ao descarte de peças com uma baixa estimativa de tempo de vida restante.

References

- [1] R. J. Cook and J. Lawless, *The statistical analysis of recurrent events*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [2] S. E. Rigdon and A. P. Basu, *Statistical methods for the reliability of repairable systems*. Wiley New York, 2000.
- [3] L. H. Crow, “Reliability analysis for complex, repairable systems,” tech. rep., Army Materiel Systems Analysis Aberdeen Proving Ground MD, 1975.
- [4] S. E. Rigdon and A. P. Basu, “The power law process: a model for the reliability of repairable systems,” *Journal of Quality Technology*, vol. 21, no. 4, pp. 251–260, 1989.
- [5] M. Engelhardt and L. J. Bain, “On the mean time between failures for repairable systems,” *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 35, no. 4, pp. 419–422, 1986.
- [6] G. L. Gilardoni and E. A. Colosimo, “Optimal maintenance time for repairable systems,” *Journal of quality Technology*, vol. 39, no. 1, pp. 48–53, 2007.
- [7] É. S. Brito, V. L. Tomazella, and P. H. Ferreira, “Statistical modeling and reliability analysis of multiple repairable systems with dependent failure times under perfect repair,” *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 222, p. 108375, 2022.
- [8] M. Kijima, H. Morimura, and Y. Suzuki, “Periodical replacement problem without assuming minimal repair,” *European Journal of Operational Research*, vol. 37, no. 2, pp. 194–203, 1988.
- [9] L. Doyen and O. Gaudoin, “Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age,” *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 84, no. 1, pp. 45–56, 2004.
- [10] M. L. G. de Toledo, M. A. Freitas, E. A. Colosimo, and G. L. Gilardoni, “Ara and ari imperfect repair models: Estimation, goodness-of-fit and reliability prediction,” *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 140, pp. 107–115, 2015.
- [11] M. Dias De Oliveira, E. A. Colosimo, and G. L. Gilardoni, “Power law selection model for repairable systems,” *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 42, no. 4, pp. 570–578, 2013.
- [12] M. Kijima, “Some results for repairable systems with general repair,” *Journal of Applied probability*, pp. 89–102, 1989.
- [13] M. L. G. de Toledo, *Determination of the optimal periodic maintenance policy under imperfect repair assumption*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2014.